

統計学の基礎

．尺度の性質

われわれの身の回りにはさまざまな「数字」があふれていますが、これらの数字を統計学的に扱う場合、その性質（尺度の性質）によって統計学的な扱い方（処理の仕方）が全く異なってきます。

種 類		内 容	例	許される統計的手法
定性的 質的	名義尺度	単に同質、異質の決定を行なうために名目的に付けられた分類を示す特性	性別(男=1、女=2)、職業、学級の番号、など	事例数を数える、モード(最頻値)を求める、属性相関を求める、など
	順序尺度	大小関係のみが存在して絶対的な値が意味を持っていない特性	鉱物の硬度、臭の快度、満足度(満足=1、普通=2、不満=3)	メディアン(中央値)、パーセンタイル(パーセント順位)、順位相関など、順序統計量の計算
定量的 量的	間隔尺度	大小関係が意味を持ち、しかも数値(目盛)間の間隔(距離)が等しい特性	(摂氏・華氏)温度、テストなどの標準化得点	平均(算術平均)や標準偏差など、和や差をもとにした統計量の計算
	比例尺度	間隔尺度の性質に、絶対的原点(絶対0点)を加え持つ...数値の比の同等待性	身長、体重、収入金額、絶対温度など	幾何平均、変異係数などの、加減乗除をもとにした統計量の計算

．記号の意味

(1) Σ (シグマ)の意味

一般に $\sum_{i=1}^n X_i$ と記す。

たとえば、 $[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ という5個のデータの値が $[1.2, 1.8, 1.8, 1.9, 1.6]$ である場合、

$$\sum_{i=1}^5 X_i = 1.2 + 1.8 + 1.8 + 1.9 + 1.6 = 8.3$$

$$\sum_{i=1}^5 3X_i = 3 \times 1.2 + 3 \times 1.8 + 3 \times 1.8 + 3 \times 1.9 + 3 \times 1.6 = 49.8$$

またクラス40名の生徒の平均身長を求める式は、

$$\text{身長の平均値} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

ここで、 $X_i = i$ 番目の生徒の身長

n = クラスの人数 (この場合は40名)

(2) ギリシャ文字

統計学ではローマ文字（アルファベット）とギリシャ文字を区別して使用することがあります。

統計学では習慣的に、「母数（パラメータ）」を示す場合にはギリシャ文字で書き、それに対応する「標本の統計量」はローマ文字（アルファベット）で記します。

また同様に、母数はローマ字の小文字、統計量はローマ字の大文字で記すという習慣もありますが、これらはいずれもあまり統一されていません。

表 ギリシャ文字				
文 字		字 記	イギリス読み	ドイツ読み
A	α	a	アルファ	
B	β	b	ビータ	ベータ
Γ	γ	g	ガンマ	
Δ	δ	d	デルタ	
E	ε	e	エプサイロン	エプシロン
Z	ζ	z	ジータ	ゼータ
H	η	e	イータ	エータ
Θ	θ	th	スィータ	テータ
I	ι	l	アイオータ	イオタ
K	κ	k	カッパ	
Λ	λ	l	ラムダ	
M	μ	m	ミュー	ムー
N	ν	n	ニュー	ヌー
Ξ	ξ	x	ザイ、サイ	クシー
O	ο	o	オマイクロン	オミクロン
Π	π	p	パイ	ピー
P	ρ	r	ロー	
Σ	σ	s	シグマ	
T	τ	th	トウ	タウ
Υ	υ	u	ウブサイロン	ウブシロン
Φ	φ	ph	ファイ	フィー
X	χ	kh,ch	カイ	キー
Ψ	ψ	ps	サイ	ブシー
Ω	ω	o	オミーガ	オメガ

・統計学（推定統計学）とは

(1) 統計学とは

集団の分布やその大きさの時間変化、いろいろなデータの解析、誤差の検定などをおこなうのに利用するほか、実験計画や意思決定などに関係する数学の一分野。

1) 記述統計学 (descriptive statistics)

無数にあるデータを整理・集約し、そのデータが表す統計集団の性質を出来るだけ簡潔に、また明確に記述表現することを目的するもの。

2) 推定統計学 (inferential statistics)

実験に伴う統計データに関係するものであり、資料の大きいことを前提とせず、むしろ少ないデータからそのデータが得られた母集団の性質について推測を行うことを目的とするもの。

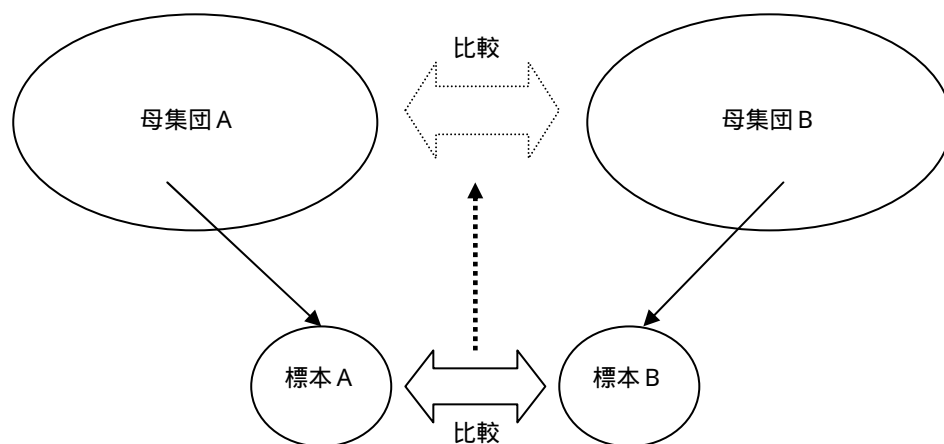
推定の問題...標本のデータから母集団の母数を知る。

信頼区間 $\circ \circ \%$ （通常は信頼区間 95%を使用）

検定の問題...母数同士の比較、母数と統計量の比較、統計量同士の比較。

(2) 検定 (test) とは

統計的仮説検定 (testing statistical hypothesis) データである「標本」をもとにして検定統計量を計算し、「母集団」に関する各種の仮説に関する適否の判断を行うもの。ピアソンによって定式化された。



検定の概念

検定...複数の標本間での差の比較を行い、その結果からそれぞれの標本に対応する母集団-の間でも差があると言えるかどうかを推定する。【例】標本 A の平均値と標本 B の平均値を比較し、その結果から「母集団 A の平均値と母集団 B の平均値との間に差がある」と言えるかどうか。

有意確率・危険率...現実の標本が示す結果が、母集団間に差がない場合 (帰無仮説が正しい場合) に発生する確率 (可能性)。この確率が 5% より小さい場合に「有意差あり」という (すなわち「母集団間では差がない」という帰無仮説が否定される)。

なぜ「検定」を行わなければならないか...全数 (全ケース) のデータが入手できている場合には検定は必要ない。しかし多くの場合 (ことに臨床医学の場面では) 標本として入手できるデータはわれわれが真に調べたいと思っている集団の全体 (母集団) のごく一部でしかない。もとよりわれわれが知りたいのは「標本間で差があったか否か」ではなく、「母集団間で差があると言えるか否か」であり、かかる結論を限られた例数の標本から導かなければならない。そこで、標本間の差があまりに小さい場合は「有意差なし」(母集団間では差があるとは言えない) という結論に至り、標本間の差がある程度大きい場合には「有意差あり」という結論になる。但しその場合も「有意確率・%で有意差あり」という表現をすることになり、この有意確率 (危険率) は「有意差あり」という結論が誤っている可能性を意味する。

統計的検定に関する主要な用語の整理

標本...調査する対象となる大きな集団の一部

標本の大きさ (サイズ) ...標本の例数

母集団...大きな集団

確率抽出・無作為抽出...母集団から無作為 (ランダム) に標本を選ぶ方法

確率標本・無作為標本...無作為に抽出された標本

母数...母集団の平均値 (母平均)、分散 (母分散)、標準偏差 (母標準偏差) などの総称

統計量...標本の平均値 (標本平均)、分散 (標本分散)、標準偏差 (標本標準偏差) などの総称

正規母集団...正規型の分布の母集団

正規分布...中央の値の例数が最も多く、中央の値より増加、減少するに従って、左右対称の形で例数が次第に減少していくもので、釣鐘型を呈する。正規分布であれば検定が可能(但し平均値が問題な場合は、多少のズレも可)。

帰無仮説 (null hypothesis) ...「差なし仮説」ともいう。母集団間に差があるかないかを調べたい場合、これを「差がない」とする仮説のこと。この仮説が棄却されることによって対立仮説(差あり仮説)が採択されることになる。
危険率・有意確率...現実の標本が示す結果が、帰無仮説が正しい場合に発生する確率(可能性)。この確率が 5% より小さい場合に「有意差あり」という(すなわち帰無仮説は「ほとんどあり得ないこと」として否定される)。「 α 」もしくは「 p 」と記し、確率 ($p=0.01$) または百分率 ($p=1\%$) で表す。

t 検定を通して、統計的検定の意味を知る

・ t 検定（平均値の差の検定、母平均の差の検定）

さらに正確にいうと「独立した 2 群間における母平均の差の検定」

アメリカ人男性と日本人男性は、どちらが背が高いか知りたい！

- (1) アメリカ人男性（1 億 4 千万人余）と日本人男性（6 千万人余）の身長
の平均値を求め、それを比較すればよい。しかしそんな時間も
手間もない！
- (2) アメリカ人男性全体（母集団）および日本人男性全体（母集団）か
ら適当な少数の標本を無作為抽出し、その両者の平均値（標本平均）
を比較し、「統計的に有意差があるか否か」を調べればよい。ここ
で利用するのが「独立した 2 群間における母平均の差の検定」（いわ
ゆる t 検定）。

No	アメリカ人男性	日本人男性
1	178.2	170.1
2	180.3	163.5
3	179.2	180.2
4	169.0	160.3
5	177.5	177.2
6	190.3	170.3
7	169.6	162.2
8	185.2	159.3
9	174.2	178.6
10	177.7	172.3
11	193.6	168.2
12	184.2	180.2
平均値	179.9	170.2
分散	51.2	54.5
標準偏差	7.15	7.38
不偏分散	55.8	59.4
不偏標準偏差	7.47	7.71

【参考】

標本の分散・標準偏差、および不偏分散・不偏標準偏差を求める計算式

$$(\text{標本の}) \text{ 分散} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}$$

ここで、 X_i = i 番目の対象の X の値

$\bar{X}$ = X の平均値

N = 例数

$$(\text{標本の}) \text{ 標準偏差} = \sqrt{\text{標本の分散}}$$

$$\text{不偏分散（母分散の不偏推定値）} = \frac{\text{標本の分散} \times N}{N - 1}$$

$$\text{不偏標準偏差（母標準偏差の不偏推定値）} = \sqrt{\text{不偏分散}}$$

【参考】

標準偏差とは...データの散布度（ちらばりの程度）を示す指標。

母集団が正規分布をしている場合、

母平均 $\pm 1 \times \sigma$ の範囲内に、全例数の 68.3% が収まる。

母平均 $\pm 2 \times \sigma$ の範囲内に、全例数の 95.5% が収まる。

母平均 $\pm 3 \times \sigma$ の範囲内に、全例数の 99.7% が収まる。

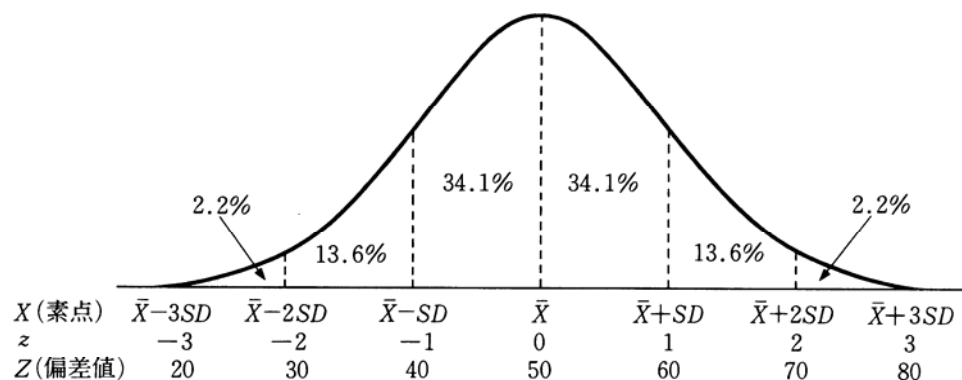


図 4・5 正規分布曲線内の面積および素点，標準得点，偏差値の関係

1. 独立した 2 群間における母平均の差の検定を実施する際の前提条件

- ・ 双方のデータとも、間隔尺度以上の定量的尺度の属性を満たしていること。
- ・ 双方のデータともに母集団は正規分布していること。

2. 帰無仮説と対立仮説

- ・ 帰無仮説：アメリカ人男性全体の平均身長 = 日本人男性全体の平均身長
- ・ 対立仮説：アメリカ人男性全体の平均身長 $\neq$ 日本人男性全体の平均身長

3. t 統計量を求める計算式

3-1. 両群の母分散が等しい場合 (母分散の差の検定で有意差が認められなかった場合)

$$t_0 = \frac{|(\text{平均 A}) - (\text{平均 B})|}{\sqrt{\frac{\{(\text{標本数 A} - 1)(\text{分散 A}) + (\text{標本数 B} - 1)(\text{分散 B})\}}{\{(\text{標本数 A}) + (\text{標本数 B}) - 2\}} \times \left(\frac{1}{\text{標本数 A}} + \frac{1}{\text{標本数 B}} \right)}}$$

$$df = \text{標本数 A} + \text{標本数 B} - 2$$

3-2. 両群の母分散が等しくない場合 (母分散の差の検定で有意差が認められた場合)

ウェルチの検定

$$t_0 = \frac{|(\text{平均 A}) - (\text{平均 B})|}{\sqrt{\left\{ \frac{(\text{分散 A})}{(\text{標本数 A})} + \frac{(\text{分散 B})}{(\text{標本数 B})} \right\}}}$$

$$df = \frac{\left\{ \frac{\text{分散 A}}{\text{標本数 A}} + \frac{\text{分散 B}}{\text{標本数 B}} \right\}^2}{\left\{ \frac{(\text{分散 A})^2}{(\text{標本 A})^2 \times (\text{標本数 A} - 1)} + \frac{(\text{分散 B})^2}{(\text{標本 B})^2 \times (\text{標本数 B} - 1)} \right\}}$$

4. 母分散の差の検定 (等分散検定)

平均値の差の検定 (t 検定) を実施するには、それに先立って 2 群の母分散が等しいかどうかを検定しなければならない。この母分散の差の検定で有意差が認めなければ (両群の母分散が等しければ) 通常の t 検定の式を用いて t 統計量を求めればよいが、母分散の差の検定で有意差 ($p < 0.05$) が認められた場合 (両群の母分散が等しくないならば) t 統計量は「ウェルチの検定」を用いて算出する。

$$F_0 = \frac{(\text{A の不偏分散})}{(\text{B の不偏分散})}$$

$$df = \text{A の標本数} - 1, \quad df = \text{B の標本数} - 1$$

F_0 算出の際には、必ず「A の不偏分散 > B の不偏分散」となるように分子と分母を決定すること。すなわち算出される F_0 は必ず 1.0 以上の値となるように分子・分母を決定すること。

5. F 分布表の見方

母分散の差の検定で算出された F 統計量と自由度 (第 1 自由度と第 2 自由度) を用いて有意差の有無を決定するには、片側分布 2.5% の臨界値が示された F 分布表を用いる。... F 分布表は基本的には片側分布表しか存在しないが、ここで行う検定は 5% 水準の両側検定を行わなければならない。そのため片側 2.5% の表を使用する。

算出された df (第 1 自由度) を表の n_1 、 df (第 2 自由度) を表の n_2 に当てはめ、両者の交わったところに記された値 ($F_{0.025}$) が、F 分布における片側 2.5% 水準の臨界値。

$F_0 \leq F_{0.025}$ なら「有意差なし」

2 群の母分散は等しい。

$F_0 > F_{0.025}$ なら「(5% 水準で) 有意差あり」

2 群の母分散は等しくない。

6. t 分布表の見方

母平均の差の検定において算出された t 統計量と自由度をもとに有意差の有無を決定するには両側確率の臨界値が示された t 分布表を使用する。

t 分布表の左端に記された df (自由度) と同表上部に示された両側確率との交わる部分に記された値が、「当該自由度における当該確率での臨界値」。

$t_0 \leq t_{0.05}$ なら「有意差なし」

2 群の母平均は等しい。

$t_{0.01} > t_0 > t_{0.05}$ 「5%水準で有意差あり」

2群の母平均は等しくない(但し危険率5%)

$t_{0.001} > t_0 > t_{0.01}$ 「1%水準で有意差あり」

2群の母平均は等しくない(但し危険率1%)

$t_0 > t_{0.001}$ 「0.1%水準で有意差あり」

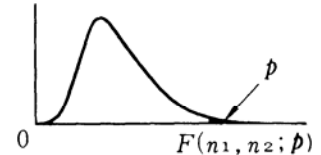
2群の母平均は等しくない(但し危険率0.1%)

7. 母平均の差の検定結果を文章でどう表現するか

アメリカ人男性と日本人男性ではどちらが身長が高いかを検討するため、双方の母集団から無作為に抽出した各12人の標本について平均値の差の検定を行った。

分析の結果、アメリカ人男性(平均値=179.9、SD=7.155)、日本人男性(平均値=170.2、SD=7.382)とではアメリカ人男性の平均身長の方が9.7cm高かった。t検定を実施したところ、t統計量=3.129(自由度=22)で危険率0.0048であり、1%水準の有意差ありと認められた。従ってアメリカ人男性は日本人男性よりも平均身長が高いといえる。

平均値の差の検定結果を記す場合、先立って実施した母分散の差の検定結果や、t統計量算出にウェルチの検定を用いたか否かは記さないのが普通。

付表 6-2 F 分布表 (片側分布 2.5%, 0.5%)

自由度 n_1 , n_2 と上側確率 p から $F(n_1, n_2; p)$ を求める表 (細字(上): $p=0.025$
太字(下): $p=0.005$)

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	$n_1 \backslash n_2$
1	648.	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	963.	969.	977.	985.	993.	997.	1001.	1006.	1010.	1014.	1018.	1
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3.	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	2
3	198.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	199.	200.	3
4	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9	4
5	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.3	42.1	42.0	41.8	5
6	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26	6
7	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.8	19.6	19.5	19.3	7
8	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02	8
9	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.5	12.4	12.3	12.1	9
10	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85	10
11	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88	11
12	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14	12
13	16.2	12.4	10.9	10.0	9.52	9.16	8.89	8.63	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08	13
14	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67	14
15	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95	15
16	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.93	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33	16
17	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19	17
18	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	18
19	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64	19
20	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	20
21	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23	21
22	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72	22
23	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90	23
24	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60	24
25	11.4	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65	25
26	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49	26
27	11.1	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44	27
28	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.58	2.52	2.46	2.40	28
29	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26	29
30	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32	30
31	10.6	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11	31
32	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25	32
33	10.4	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98	33
34	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19	34
35	10.2	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87	35
36	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13	36
37	10.1	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78	37
38	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09	38
39	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69	39
40	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04	40
41	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61	41
42	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00	42
43	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55	43
44	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97	44
45	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48	45
46	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94	46
47	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43	47
48	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91	48
49	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38	49
50	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.00	2.03	1.95	1.88	50
51	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33	51
52	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85	52
53	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29	53
54	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83	54
55	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25	55
56	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09					

付表3 種々の有意水準における t の臨界値

df	片側確率(両側確率)					df	片側確率(両側確率)				
	.10 (.20)	.05 (.10)	.025 (.05)	.01 (.02)	.005 (.01)		.10 (.20)	.05 (.10)	.025 (.05)	.01 (.02)	.005 (.01)
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50						
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	32	1.31	1.69	2.04	2.45	2.74
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	34	1.31	1.69	2.03	2.44	2.73
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	36	1.31	1.69	2.03	2.43	2.72
						38	1.30	1.69	2.02	2.43	2.71
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05						
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	45	1.30	1.68	2.01	2.41	2.69
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	50	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	55	1.30	1.67	2.00	2.40	2.67
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90						
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	70	1.29	1.67	1.99	2.38	2.65
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	80	1.29	1.66	1.99	2.37	2.64
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	90	1.29	1.66	1.99	2.37	2.63
						100	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83						
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	150	1.29	1.66	1.98	2.35	2.61
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	200	1.29	1.65	1.97	2.35	2.60
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	∞	1.28	1.65	1.96	2.33	2.58

8. 母平均の差の検定をパソコンで実施した場合

SPSS (SPSS 社製品 <http://www.spss.co.jp/index.html>) の結果

グループ統計量

	国別	N	平均値	標準偏差	平均値の 標準誤差
身長	アメリカ人	12	179.9167	7.4709	2.1567
	日本人	12	170.2000	7.7089	2.2254

独立サンプルの検定

		等分散性のための Levene の検定		2 つの母平均の差の検定						
		F 値	有意確率	t 値	自由度	有意確率 (両側)	平均値の差	差の標準誤差	差の 95% 信頼区間	
									下限	上限
身長	等分散を仮定する。	.115	.738	3.135	22	.005	9.7167	3.0989	3.2898	16.1435
	等分散を仮定しない。			3.135	21.978	.005	9.7167	3.0989	3.2895	16.1439

エクセル統計 (SSRI 社製品 <http://software.ssri.co.jp/>) の結果

等分散性の検定			
変 数	日本人男性	アメリカ人男性	差
サンプル数	12	12	0
分 散	59.4272727	55.81424242	3.61303
標準偏差	7.70890866	7.470893014	0.238016
自 由 度	11	11	
統計量:f	1.06473312		
P 値	0.4595		
f(0.05)	2.81792722		
判 定			

母平均の差の検定: 対応のない2標本・t分布・ $\sigma_1 = \sigma_2$			
変 数	日本人男性	アメリカ人男性	差
サンプル数	12	12	0
平 均	170.2	179.9167	-9.71667
標準偏差	7.708909	7.470893	0.238016
自 由 度	22		
統計量:t	-3.1355		
P 値	0.0048		
t(0.05/2)	2.0739		
判 定	有意		

FreeJSTAT (佐藤真人氏製作) の結果

FreeJSTAT の入手先 <http://www.vector.co.jp/soft/win95/business/se235119.html>

<<< 等分散の F 検定 >>>

X : 第 1 列 アメリカ人男性 Y : 第 2 列 日本人男性

[両側検定]

X の自由度	Y の自由度	T-Value	危険率
11	11	0.939202	p=0.9190
判定 : 有意水準 5 % 有意差なし 1 % 有意差なし			

[片側検定]

X の自由度	Y の自由度	T-Value	危険率
11	11	0.939202	p=0.4595
判定 : 有意水準 5 % 有意差なし 1 % 有意差なし			

<<< 対応のない t 検定 >>>

X : 第 1 列 アメリカ人男性

Y : 第 2 列 日本人男性

変数	データの個数	平均値	標準偏差	標準誤差
第 1 列	12	179.916667	7.470893	2.156661
第 2 列	12	170.200000	7.708909	2.225370

平均値の差の 95 % 信頼区間

3.288115 ~ 16.145219

F 検定により有意水準 5 % で母分散が等しいとみなせるので、Student's t-test により検定します。

[両側検定]

t-value	自由度	危険率
3.135476	22	p=0.0048

判定 : 有意水準 5 % 有意差あり 1 % 有意差あり

有意水準 5 % の場合の検出力 : power>0.8

[片側検定]

t-value	自由度	危険率
3.135476	22	p=0.0024

判定 : 有意水準 5 % 有意差あり 1 % 有意差あり

有意水準 5 % の場合の検出力 : power>0.8

代表値の差を検定するさまざまな方法

1. 代表値と散布度

(1) 代表値

代表値とは 分布（すなわちグループ）を代表する値。

並数[mode]（流行値、最頻値） 度数の最も多い値。名義尺度以上で使用可。 Mo と記すことが多い。

中央値[median]（中間値、中位数） 測定値を大きさの順に並べた場合、ちょうど中央にくる値。順序尺度以上で使用可。 Mdn または Me と記すことが多い。

N (総数) = 奇数の場合

Me は $\frac{N+1}{2}$ 番目の値。

N (総数) = 偶数の場合

Me は $\frac{N}{2}$ 番目の値と、 $\frac{N}{2}+1$ 番目の値の平均値。

算術平均[arithmetic mean]（単に平均ともいう） 間隔尺度異常で使用可。 M , $\bar{X}$ などと記す。

幾何平均[geometric mean] 個々の測定値の対数の算術平均の逆対数値。比例尺度のみで使用可。 G または GM と記すことが多い。

$$G = (X_1, X_2, X_3 \dots X_n)^{\frac{1}{N}}$$

(2) 散布度

散布度[dispersion]とは 測定値が代表値の周囲に広く（あるいは狭く）散布している程度、すなわち分布の大きさ。代表値の信頼度の指標となる。

範囲[range]（領域） 分布の最高点と最低点の差。間隔尺度以上で使用可だが、順序尺度の場合は最高点と最低点をそのまま記せば(差を求めない)使用可。 ω , q , R で記す。

四分領域[semi-interquartile range]（かつては四分偏差ともいった） 順序尺度以上で使用可だが、特に順序尺度に適したもの。 Q で示す。

$$Q = \frac{Q_1 - Q_3}{2}$$

ここで、

Q_1 = 分布全体の中央値と分布の最低値との中央値。第一四分位数という。

Q_3 = 分布全体の中央値と分布の最高値との中央値。第三四分位数という。

平均偏差[mean deviation, mean variation] 各測定値から平均を引いた偏差(x_i)の絶対値の和を総度数で割ったもの。間隔尺度以上に使用可。 MD , または MV と記す。

$$MD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - \bar{X}|$$

標準偏差[standard deviation] 一般的に SD で示すが、特に母集団の標準偏差を σ で、標本の標準偏差を s または u で示す慣わしがある。間隔尺度に用いられる。

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}}$$

変異係数[coefficient of variation] (変動係数) SD を平均 $\bar{X}$ で割り、100 を掛けたもの。 V または CV と記す。異なる単位尺度間での比較ができる。

$$CV = \frac{SD}{\bar{X}} \times 100$$

．代表値の差の検定

(1) パラメトリック検定とノンパラメトリック検定

- ・ パラメトリック検定 検定に用いる統計量(Z 値、t 値、F 値など)が特定の分布に従うという仮定をおく検定方法。
- ・ ノンパラメトリック検定 検定に用いる統計量の分布に特別な分布型を仮定しない検定方法。 標本数が小さい場合や標本の分布が不明の場合に使用する。但し検定力（有意差が得られる可能性）はパラメトリック検定に比べて低くなる。

(2) 代表値の差の検定

	2 群		3 群以上	
	対応のない場合	対応のある場合	対応のない場合	対応のある場合
パラメトリック検定	独立した標本における t 検定	対応した標本における t 検定	一元配置分散分析（対応なし）	一元配置分散分析（対応あり）
ノンパラメトリック検定	マン-ウィットニー (Mann-Whitney) の U テスト 中央値テスト	ウィルコクソン (Wilcoxon) の符号付順位和検定 符号検定	クラスカル-ワリス (Kruskal-Wallis) の H テスト 中央値テスト	フリードマン (Friedman) の検定 対応のある場合の中央値テスト

1. 独立した標本における t 検定（母平均の差の検定）

1-1. 両群の母分散が等しい場合（母分散の差の検定で有意差が認められなかった場合）

$$t_0 = \frac{|(\text{平均 A}) - (\text{平均 B})|}{\sqrt{\frac{\{(\text{標本数 A} - 1)(\text{分散 A}) + (\text{標本数 B} - 1)(\text{分散 B})\}}{\{(\text{標本数 A}) + (\text{標本数 B}) - 2\}} \times \left(\frac{1}{\text{標本数 A}} + \frac{1}{\text{標本数 B}} \right)}}$$

$$df = \text{標本数 A} + \text{標本数 B} - 2$$

1-2. 両群の母分散が等しくない場合（母分散の差の検定で有意差が認められた場合）

$$t_0 = \frac{|(\text{平均 A}) - (\text{平均 B})|}{\sqrt{\left\{ \frac{(\text{分散 A})}{(\text{標本数 A})} + \frac{(\text{分散 B})}{(\text{標本数 B})} \right\}}}$$

$$df = \frac{\left\{ \frac{\text{分散 A}}{\text{標本数 A}} + \frac{\text{分散 B}}{\text{標本数 B}} \right\}^2}{\left\{ \frac{(\text{分散 A})^2}{(\text{標本 A})^2 \times (\text{標本数 A} - 1)} + \frac{(\text{分散 B})^2}{(\text{標本 B})^2 \times (\text{標本数 B} - 1)} \right\}}$$

2. 対応した標本におけるt検定

$$t_0 = \frac{\frac{|\text{差の平均値}|}{\sqrt{\frac{\text{差の不偏分散}}{\text{標本数}}}}}{\sqrt{\frac{\text{差の不偏分散}}{\text{標本数}}}}$$

$$df = \text{標本数} - 1$$

3. 一元配置分散分析 (one-way ANOVA) (対応なし)

$$F_0 = \frac{\left\{ \frac{(\text{級間平方和})}{(\text{級間平方和の自由度})} \right\}}{\left\{ \frac{(\text{級内平方和})}{(\text{級内平方和の自由度})} \right\}}$$

$$df = \text{級間平方和の自由度(第 1 自由度)}, \text{級内平方和の自由度(第 2 自由度)}$$

4. 一元配置分散分析 (対応あり)

省略

5. マン-ウィットニーのU検定

2 群 (A 群と B 群) 込みでデータを小さい順に並び替える。

群ごとに順位の和(順位和)を計算する。

$$U_A = (\text{標本数A}) \times (\text{標本数B}) + \frac{(\text{標本数A}) \times (\text{標本数A} + 1)}{2} \times (\text{順位和A})$$

$$U_B = (\text{標本数A}) \times (\text{標本数B}) + \frac{(\text{標本数B}) \times (\text{標本数B} + 1)}{2} \times (\text{順位和B})$$

U_A と U_B のうち小さい方を U とする。

$$Z_0 = \frac{\left| U - \frac{(\text{標本数A}) \times (\text{標本数B})}{2} \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{(\text{標本数A}) \times (\text{標本数B}) \times (\text{標本数A} + \text{標本数B} + 1)}{2}}}$$

Z_0 は近似的に正規分布をする。ちなみに正規分布の両側臨界値は、5%水準 1.96、1%水準 2.58、0.1%水準 3.29。

標本数が小さい場合 (たとえば 20 未満) U をもとにマン-ウィットニーの検定を示した付表をもとに有意差を判定することが可能。

6. 中央値検定

2 群の標本を合わせて全体の中央値を求める。

得られた中央値を基準として、それより上と、それ以外に両群を二分する 2×2 の分割表を作る。

	A 群	B 群	計
中央値より上	度数 a	度数 b	度数 a+度数 b
それ以外	度数 c	度数 d	度数 c+度数 d
計	度数 a+度数 c	度数 b+度数 d	n (総度数)

χ^2 値を求め、 χ^2 検定を行う。自由度 = 1。

$$\chi^2 = \frac{n(|\text{度数}a \times \text{度数}d - \text{度数}b \times \text{度数}c| - n/2)^2}{(\text{度数}a + \text{度数}b)(\text{度数}c + \text{度数}d)(\text{度数}a + \text{度数}c)(\text{度数}b + \text{度数}d)}$$

7. ウィルコクソンの符号付順位和検定

2 群間において、対応する全ての対について値の差 (Z_i) を求めておく。

$|Z_i|$ の小さい順に 0 を除いて順位を付ける。

Z_i の正負で 2 群に分ける。

各群の順位和を計算し、このうち小さい方の値 (R) を選ぶ。

$$z = \frac{|R - n(n+1)/4| - 1/2}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

z は近似的に正規分布をする。ちなみに正規分布の両側臨界値は、5%水準 1.96、1%水準 2.58、0.1%水準 3.29。

標本数が小さい場合、付表をもとに有意差を判定することが可能。

8. 符号検定

A 群 B 群 2 群間において、対応する全ての対について A 群が勝っていれば「+」、劣っていれば「-」とする。優劣がつかない場合は、その対は無視する。

「+」の数と「-」の数を足し合わせ、この数のうち「+」または「-」が偶然にその数だけだけ出現する確率を計算する (2 項分布の計算式を利用)。

得られた確率 (片側確率) を 2 倍し、両側確率を算出する。

9. クラスカル-ワリスのHテスト

k 群の標本があるとする、これらを混ぜ合わせて全ての測定値を小さいものから順に並べ順位を付ける。

ここで n_i を標本の大きさ(群内の測定値の数)、 R_i をその標本(群)における順位の総計とすると

$$\sum n_i = N, \quad \sum R_i = \frac{N}{2}(N+1) \quad N \text{ は測定値全体の数。}$$

(もし同点がないならば) 下記 H は近似的に $(k-1)$ の自由度で χ^2 分布をする。

$$H = \left\{ \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} \right\} - 3(N+1)$$

n_i が 5 以下で、標本の数(群の数)が 3 の場合は、付表をもとに有意差を判定することが可能。

(もし同点がある場合は) 順位の平均を代用しておいて、以下に求める C で H を割る。得られた H/C は $(k-1)$ の自由度で χ^2 分布をする。

$$C = 1 - \frac{T}{N(N^2-1)}$$

ただし、 $T = \sum (t^2 - t)$, ここで t はそれぞれの値における同じ順位を持つ値の数(すなわち結び[タイ]の大きさ)。

10. 中央値検定

k 群の標本を合わせて全体の中央値を求める。

得られた中央値を基準として、それより上と、それ以外に両群を二分する $2 \times k$ の分割表を作る。

	1 群	2 群	...	k-1 群	k 群	計
中央値より上						
それ以外						
計						

χ^2 値を求め、 χ^2 検定を行う。自由度 = $(k-1)$ 。

$$\chi^2 = 4 \left(\sum f_{ij}^2 / T_i \right) - N$$

ここで f_{ij} は各群の全体の中央値より上の度数、 T_i は各群の総度数。

11. フリードマンの検定

n 人の被験者が k 個の条件下の全てで測定値を得た場合（ゆえに測定値の個数は $n \times k$ 個となる）について。

以下の式で χ^2 値を求め、 χ^2 検定を行う。自由度 = $(k - 1)$ 。

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k (R_j)^2 - 3n(k+1)$$

ここで R_j は、 j 番目の条件下における測定値の合計。

しかし N や k が小さい場合は χ^2 分布に近似しなくなるため、付表を利用する。

12. 対応のある場合の中央値検定

n 人の被験者が k 個の条件下の全てで測定値を得た場合（ゆえに測定値の個数は $n \times k$ 個となる）について。

k 個の条件の各々について中央値を計算する。

条件ごとに、各測定値が中央値より上なら +、下なら - として新しい表を作成する。

...以下省略

. 多重比較 (multiple comparison)

平均値など代表値の差の検定を行う場合、2 群間での差の検定では帰無仮説は $H_0: \mu_1 = \mu_2$ であり、これが棄却された場合は対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ が採択されることになり、母平均 μ_1 と μ_2 が等しくないと結論することができる。

しかし多群 (たとえば 3 群) で平均値の差の検定を行う場合、帰無仮説は $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ であり、これが棄却された場合に採択される対立仮説は $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ かもしれないし $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ かもしれないし $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ かもしれない。すなわち μ_1 、 μ_2 、 μ_3 のどことどの間に有意差があったのかを特定することができない。

そのため 3 群以上の平均値の差の検定を行い、有意差が得られた場合は、それに続く下位検定としてどの群とどの群の間に差があったのかを確認しなければならない。

なお特別な事情がない限り (対立仮説が特定なものでない限り) k 個の平均値の有意差検定に t 検定を用いてはならない。 t 検定はあらかじめ決められた 2 つの群間の有意差を知るためのものであって、 k 個の平均値の中の任意の平均値対の有意差検定のためのものではない。もしこのような場合に t 検定を用いると、不当に多くの有意な t を得ることになる。

多重比較の方法には次のものがある。(計算式は省略)

- 1 . ライアン(Ryan)の方法
- 2 . テューキー(Tukey)の方法
- 3 . ダンカン(Duncan)の方法
- 4 . シェッフエ(Scheffe)の方法
- 5 . 最小有意差(LSD)法

相関関係・相関係数、さまざまな関連度の指標

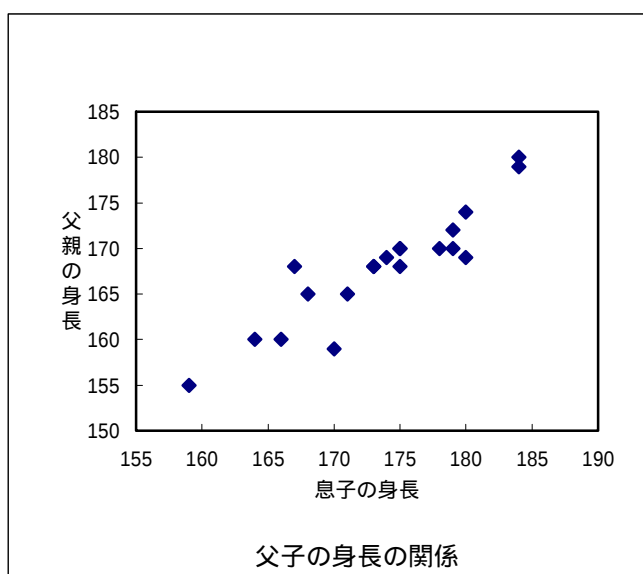
(1) 関数関係と相関関係

- 関数関係... $y = 3x + 5$ 、 $y = 5x^2 + 3x - 8$ のように、一方の変数 (x) の値が決まれば、他方の変数 (y) の値が決まる関係。
- 相関関係... 一方の変数 (x) の値が決まったからといって、他方の変数 (y) の値が正確に決まるわけではないが、 x が高値なら y も高値な傾向がある...とか x が高値なら y は低値な傾向がある...といった関係。

例：父親の身長と息子の身長の関係

(2) 散布図（相関図）

名簿番号	息子(本人)の身長	父親の身長
1	168	165
2	179	172
3	159	155
4	171	165
5	173	168
6	175	170
7	180	174
8	167	168
9	184	180
10	173	168
11	174	169
12	175	170
13	178	170
14	164	160
15	180	169
16	184	179
17	170	159
18	179	170
19	166	160
20	175	168

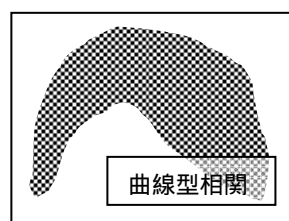
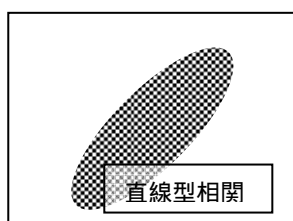


・散布図（相関図）..... 2つの変数の相関性を調べるために、多くの資料について x と y の値を測定し、 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ..., (x_N, y_N) と N 組の観測資料を得て、横軸に x の値、縦軸に y の値をとり、そこに N 個の点を位置づけたもの。

(3) 相関の型

直線型相関(線形相関)..... 相関分布の形が直線型をしている。

曲線型相関(非線形相関)... 相関分布の形が曲線型をしている。



後述の相関係数は『直線型相関(線形相関)』のみに有効。『曲線型相関(非線形相関)』の場合には相関比など別の測

通常『相関関係』というと、直線的相関を指すことが多い。

(4) 相関の種類

正の相関.....『右上がり』の相関関係・一方の値(x)が大きい人は、他方の値(y)も大きいという関係。

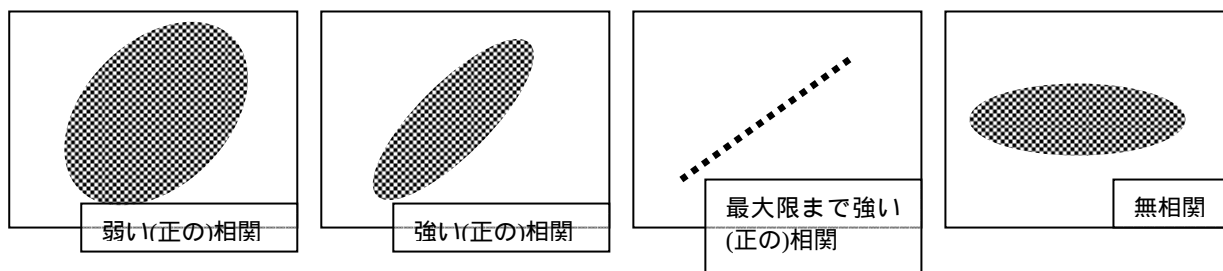
負の相関.....『右下がり』の相関関係・一方の値(x)が大きい人は、他方の値(y)が小さいという関係。

無相関..... 相関関係が認められない・ x と y の間に特定の関係が存在しない。



(5) 相関の強さ

相関の強さ(変数 x と変数 y との間の関係の強さ)は、散布図にプロットした点の領域が斜め(右上がり、または右下がり)に強く集まっているか否かで知ることができる。



(6) 相関係数(ピアソンの偏差積率相関係数)

- ・ 相関係数(r)...直線相関の方向と強さを表す。- 1 ~ + 1 の値をとる。
- ・ 方向(正負)... 0 ~ + 1 の値の場合は正の相関(右上がりの相関)、0 ~ - 1 の値の場合は負の相関(右下がりの相関)。
- ・ 強さ...相関係数の絶対値が大きいほどその相関関係は強い。

(7) 相関係数の計算方法

- ・ 基本的には相関係数の計算式は以下のとおりである。

$$XとYとの相関係数 = \frac{(XとYの共分散)}{\sqrt{(Xの分散) \times (Yの分散)}}$$

共分散...変数 A の偏差と変数 B の偏差をかけ合わせて合計した値(積和)を例数で割ったもの。

- ・ 「共分散」を使用せずに直接計算する式は以下の通り。

$$XとYとの相関係数 = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\{N \sum X^2 - (\sum X)^2\} \{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$$

以下のデータを用いて相関係数を計算してみてください。正解は「 $r = 0.91326$ 」となります。

No	X	Y	X ²	Y ²	X*Y
1	168	165	28224	27225	27720
2	179	172	32041	29584	30788
3	159	155	25281	24025	24645
4	171	165	29241	27225	28215
5	173	168	29929	28224	29064
6	175	170	30625	28900	29750
7	180	174	32400	30276	31320
8	167	168	27889	28224	28056
9	184	180	33856	32400	33120
10	173	168	29929	28224	29064
11	174	169	30276	28561	29406
12	175	170	30625	28900	29750
13	178	170	31684	28900	30260
14	164	160	26896	25600	26240
15	180	169	32400	28561	30420
16	184	179	33856	32041	32936
17	170	159	28900	25281	27030
18	179	170	32041	28900	30430
19	166	160	27556	25600	26560
20	175	168	30625	28224	29400
合計	3474	3359	604274	564875	584174

(8) 相関係数の有意性の検定

- 標本から得られた相関係数(r)の有意性は、その相関値が0 (ゼロ) であるかどうかを調べる無相関検定を用いて行われる。すなわち標本から得られた r が、母相関係数($\rho : \rho = 0$) とする帰無仮説を棄却できるかどうかをテストする。

$$t_0 = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad df = N-2$$

- 上記の式で t_0 を算出し、 df とともに t 分布表を用いて相関係数 r の有意性を決定する。ちなみに先の例題の場合、「 $t_0 = 9.511$ 、 $df = 18$ 」で、0.1%水準で有意な相関関係がある。

(9) さまざまな種類の相関係数

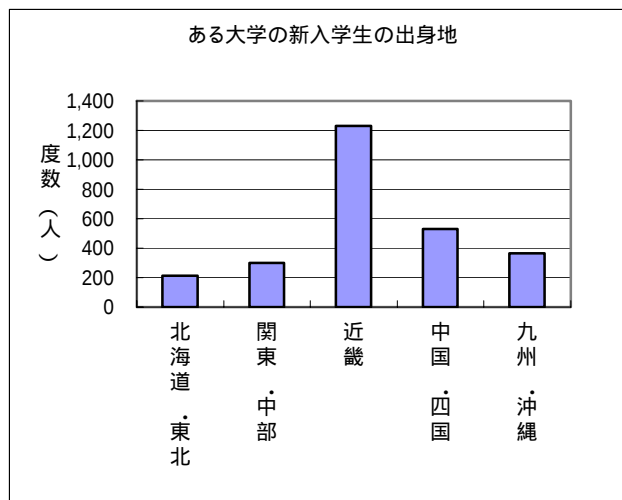
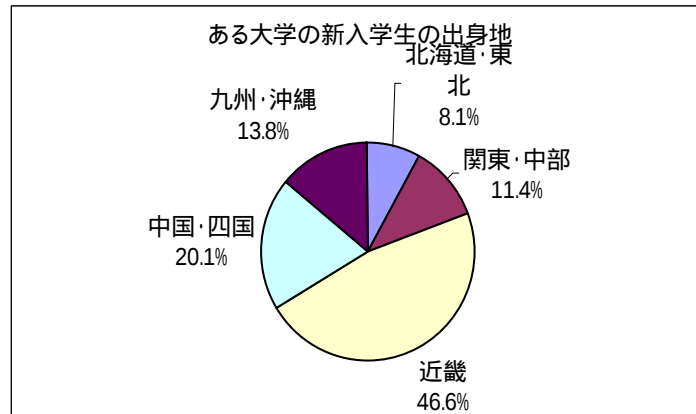
相関の測度

	名称	変域	適用できる変数の種類	母集団の性質
2変数の相 関関係	独立係数(C)	$0 \leq C \leq +1$ 但しカテゴリー数によっ て最大値は制限される。	名義尺度	
	点相関係数 (ϕ ファイ)	$-1 \leq \phi \leq +1$	名義尺度・順序尺度	2変量ともに2値をとる離散変量
	スピアマンの順位相関係数 (ρ_s ロー)	$-1 \leq \rho_s \leq +1$	順序尺度	
	ケンドールの順位相関係数 (τ タウ)	$-1 \leq \tau \leq +1$	順序尺度	
	四分相関係数 (ρ_{tet})	$-1 \leq \rho_{tet} \leq +1$	距離尺度・比例尺度	2変量正規分布、直線回帰(ただし2変量 とも分割点の上か下かしか示されない)
	点双列相関係数 (ρ_{pb})	$-1 \leq \rho_{pb} \leq +1$	1変量(X)は名義尺度・順序尺度、1 変量(Y)は距離尺度・比例尺度	Xは2値をとる離散変量、Yは正規分布 に従う。
	双列相関係数 (ρ_{bis})	$-1 \leq \rho_{bis} \leq +1$	距離尺度・比例尺度	2変量正規分布、直線回帰(ただし1変量 は分割点の上か下かしか示されない)
	ピアソンの偏差積率相関係数	$-1 \leq \rho \leq +1$	距離尺度・比例尺度	2変量正規分布、直線回帰
	相関比 (η イータ)	$0 \leq \eta \leq +1$	1変量(X)はどの尺度でもよい、1変 量(Y)は距離尺度・比例尺度	Xのそれぞれの値に対応するYはそれぞ れ正規分布に従う。直線回帰。
3変数以上 についての 相関関係	一致係数 (W)	$0 \leq W \leq +1$	順序尺度	
	重相関係数 ($\rho_{X \cdot YZ}$)	$0 \leq \rho_{X \cdot YZ} \leq +1$	距離尺度・比例尺度	多変量正規分布、直線回帰
	偏相関係数 ($\rho_{XY \cdot Z}$)	$0 \leq \rho_{XY \cdot Z} \leq +1$	距離尺度・比例尺度	多変量正規分布、直線回帰

度数を扱う

(1) 度数とは

- ・ 名義尺度に基づくデータにおける、それぞれのカテゴリー（例：変数＝「性別」、カテゴリー＝「男」or「女」）に属している人数・度数・回数など。
- ・ それらが全体に対して占められる比率についての記述や分析あるいは比較などが主たる統計的処理となる。
- ・ グラフ化する場合は、カテゴリーごとの実数（度数）や百分率などを円グラフや棒グラフで描く。



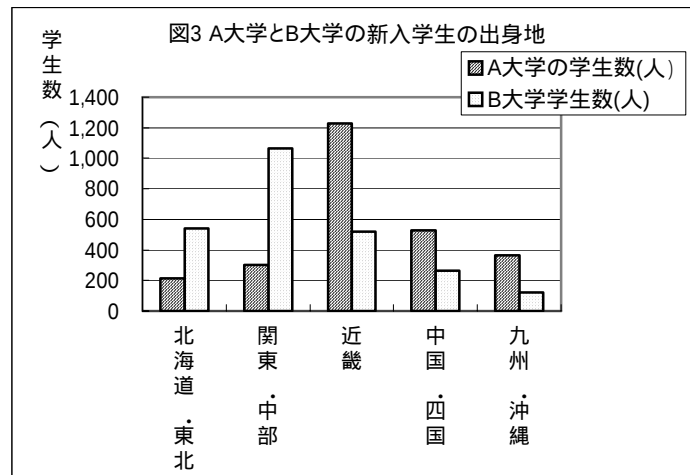
(2) 独立した2群の比率の差の検定(独立性の検定)

 χ^2 検定を行う場合

- ・ 名義尺度によって測定された、独立した2群のデータの分布(比率)に差があるか否かを検定する。
- ・ 表2のデータ(A大学とB大学の新入学生の出身地)をグラフ化すると図3に示したように、両群の明らかに相違がある(ように見える)。これを統計的検定によって証明するには χ^2 検定(カイジヤウ・ケンテイ)を用いる。

表2 A大学とB大学の新入学生の出身地

地域	A大学の学生数(人)	B大学学生数(人)	計
北海道・東北	215	541	756
関東・中部	300	1,065	1,365
近畿	1,230	521	1,751
中国・四国	530	266	796
九州・沖縄	365	121	486
計	2,640	2,514	5,154



χ^2 値の計算

- χ^2 検定とは、分割表（度数を示した表。表2）において、**観測度数**（表2の大学別×地域別の人数。実際に測定された度数。）と**期待度数**（**周辺度数** [表2の「計」の部分]の値を固定させた場合、2つの分布に相違がない場合に期待される度数。）との差（正確に言うと、差の二乗を期待度数で割ったもの）を分割表全体について合計したものが、 χ^2 分布に従うことを利用したもの。

表3 A大学とB大学の新入学生の出身地

地域	A大学	B大学	計
北海道・東北			756
関東・中部			1,365
近畿			1,751
中国・四国			796
九州・沖縄			486
計	2,640	2,514	5,154

- 第i行、第j列のセルの期待度数(Expectation)の計算

$$E_{ij} = \frac{N_{i.} N_{.j}}{N_{..}}$$

E_{ij} = 第i行第j列のセルの期待度数

$N_{i.}$ = 第i行の度数の合計（周辺度数）

$N_{.j}$ = 第j列の度数の合計（周辺度数）

$N_{..}$ = 総度数

- $m \times k$ の分割表（行数m、列数kの分割表）における χ^2 値の計算

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$df = (M - 1)(K - 1)$$

O_{ij} = 第i行第j列のセルの観測度数（Observation）

E_{ij} = 第i行第j列のセルの期待度数（Expectation）

M = 行の数

K = 列の数

- χ^2 分布表を用いての χ^2 検定

表2・表3の例題の場合、自由度は $(5 - 1) \times (2 - 1) = 4$ である。 χ^2 分布表より（片側確率）5%水準の臨界値は $\chi^2 = 9.488$ 、1%水準の臨界値は $\chi^2 = 13.277$ 、0.1%水準の臨界値は $\chi^2 = 18.467$ 。計算で求められた χ^2 値が臨界値より大きければ、当該水準（危険率、有意確率）で有意差あり。つまり「2つの群の比率（分布）は等しくない」といえる。

M × K 分割表における χ^2 = 検定使用の限定条件

- ・ M × K 分割表に「5」に満たない期待度数のセルがあったら、その場合はその分割表に χ^2 検定を施さない方が
良い。その場合、以下の方法をとる。
 1. χ^2 検定を諦める。(場合によっては Fisher の直接確率、イエーツの修正式を用いた χ^2 検定が実施
可能)
 2. 5 未満の期待度数のセルを含む行または列を削除する。
 3. 5 未満の期待度数のセルを含む行または列を、他の行または列と合併する。

表 4 C 大学と D 大学の新入学生の出身地

地域	A 大学の学 B 大学学生		計
	生数(人)	数(人)	
北海道・東北	21	10	31
関東・中部	57	29	86
近畿	18	54	72
中国・四国	5	18	23
九州・沖縄	3	10	13
計	104	121	225

2 × 2 分割表 (2 行 2 列で構成される分割表) の χ^2 検定

・ 2 行 2 列で構成される分割表の場合、 χ^2 値計算の簡便式が存在し、また期待度数 5 未満のセルが存在してもイエーツの修正式を用いることで対応できる。

・ 2 × 2 の場合の χ^2 値の算出法

表 5 2 × 2 の分割表

変数 β			計
変数 α	a	b	a+b
	c	d	c+d
計	a+c	b+d	n つまり a+b+c+d

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

$$df = (\text{行数} - 1)(\text{列数} - 1) = 1$$

2 × 2 分割表の χ^2 検定におけるイエーツ(Yates)の修正式

・ 2 × 2 の分割表において期待度数「5 未満」のセルがある場合は、イエーツの修正式を用いて χ^2 値を算出する。

$$\chi^2 = \frac{n(|ad - bc| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

$$df = (\text{行数} - 1)(\text{列数} - 1) = 1$$

表 6 性別と喫煙状況

		喫煙状況		計
		喫煙	非喫煙	
性別	男	18	12	30
	女	4	8	12
計		22	20	42

フィッシャーの直接確率 (Fisher's exact test) による独立性の検定

- ・ 2×2 の分割表において、偶然にそのような分割表 (の観測度数の分布) ができる確率を直接計算する方法。得られた値は、 χ^2 検定における「p 値」に対応する (ただし χ^2 検定は両側確率、フィッシャーの直接確率は片側確率)。
- ・ 度数 (観測度数) の最も小さいセルに注目し、その度数をさらにひとつずつ小さくしてゆき (周辺度数は固定したまま) 最終的に度数が 0 になるまで分割表を作成する。
- ・ 出来上がった分割表 (この場合、計 3 個) それぞれの分割表ができる確率を合計する。

表 7 ダイエット経験と朝食摂取

		朝食摂取		計
		はい	いいえ	
ダイエット経験	なし	12	5	17
	あり	2	8	10
計		14	13	27

		朝食摂取		計
		はい	いいえ	
ダイエット経験	なし	13	4	17
	あり	1	9	10
計		14	13	27

		朝食摂取		計
		はい	いいえ	
ダイエット経験	なし	14	3	17
	あり	0	10	10
計		14	13	27

(a) ダイエット経験「あり」、かつ朝食摂取「はい」の度数が 2 の場合

い」の

$$\text{確率1} = \frac{{}^{14}C_{12} \times {}^{13}C_5}{{}^{27}C_{17}} = \frac{(17!) \times (10!) \times (14!) \times (13!)}{(27!) \times (12!) \times (5!) \times (2!) \times (8!)}$$

(b) ダイエット経験「あり」、かつ朝食摂取「はい」の度数が 1 の場合

$$\text{確率2} = \frac{{}^{14}C_{13} \times {}^{13}C_4}{{}^{27}C_{17}} = \frac{(17!) \times (10!) \times (14!) \times (13!)}{(27!) \times (13!) \times (4!) \times (1!) \times (9!)}$$

(c) ダイエット経験「あり」、かつ朝食摂取「はい」の度数が 0 の場合

$$\text{確率3} = \frac{{}^{14}C_{14} \times {}^{13}C_3}{{}^{27}C_{17}} = \frac{(17!) \times (10!) \times (14!) \times (13!)}{(27!) \times (14!) \times (3!) \times (0!) \times (10!)}$$

フィッシャーの直接確率 = 確率 1 + 確率 2 + 確率 3

但し得られた確率は片側確率なので、両側確率を知るにはこれを 2 倍すること。...そうすると χ^2 検定における「p 値」に対応する有意確率が得られる。

(3) 対応のある場合の χ^2 検定 (変化性の検定) ... McNemar の検定

- この検定では “ 変化した ” ことを示すセルに注目。

表 8 対応のある場合の 2×2 分割表の検定

		現在		計
		賛成	反対	
1 年前	賛成	82	25	107
	反対	15	54	69
計		97	79	176

「構造改革」に賛成か反対か

このセルの
度数を B と
する。

このセルの
度数を C と
する。

- χ^2 値の計算

$$\chi^2 = \frac{(B - C)^2}{B + C}$$

$$df = (\text{行数} - 1)(\text{列数} - 1) = 1$$